Propagation d'ondes élastiques guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire

Alain Bamberger, Patrick Joly, Michel Kern

Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1, Mathématique

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Propagation d'ondes élastiques guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire.* Note de **Alain Bamberger, Patrick Joly** et **Michel Kern,** présentée par Jacques-Louis Lions.

Nous montrons l'existence d'une suite de modes élastiques guidés par la surface d'une cavité cylindrique. Deux de ces modes se propagent pour toute valeur du nombre d'onde, les autres n'existent qu'au-delà d'un certain seuil.

MATHEMATICAL ANALYSIS. — Propagation of elastic surface waves along a cylindrical cavity of arbitrary cross section.

We prove the existence of a hierarchy of elastic modes guided by the surface of a cylindrical cavity. Two of these modes propagate whatever the wave number. All of the others exists only beyond a certain threshold.

Nous étudions la propagation d'ondes élastiques, guidées par la surface d'une cavité cylindrique dans un milieu infini. Ces ondes jouent le rôle, pour un problème extérieur, des ondes de Rayleigh pour un demi-espace (*cf.* Achenbach [1]). Elles se propagent dans la direction des génératrices du cylindre, et leur énergie est localisée au voisinage de la cavité.

Contrairement au cas des guides d'ondes optiques, où la propagation ne peut avoir lieu que s'il existe un contraste de vitesses, nous montrerons que ces ondes de surface existent dans un milieu homogène. Comme pour l'onde de Rayleigh, la propagation est rendue possible par la condition de surface libre.

Position du problème. — Nous considérons un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, dont le complément Ω_0 est un domaine borné (Ω_0 est la section droite de la cavité). Nous cherchons des champs de déplacement de la forme:

$$u(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2)\, e^{i(\omega t - \beta x_3)} \tag{1}$$

c'est-à-dire des champs harmoniques de pulsation ω, se propageant dans la direction x_3 avec un nombre d'onde β, à la vitesse $c=\omega/\beta$.

A un tel champ, nous associons le tenseur des déformations ε^β, et le tenseur des contraintes σ^β. Dans notre cas, ε^β est défini par:

$$\left\{\begin{aligned} &\varepsilon_{ij}^\beta(u) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \qquad i,j=1,2 \\ &\varepsilon_{i3}^\beta(u) = \varepsilon_{3i}^\beta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_i} - i\beta u_i\right), \qquad i=1,2 \\ &\varepsilon_{33}^\beta(u) = -i\beta u_3 \end{aligned}\right. \tag{2}$$

et σ^β est relié à ε^β par la loi de Hooke (loi de l'élasticité linéaire isotrope):

$$\sigma_{ij}^\beta(u) = \lambda(\operatorname{tr}\varepsilon^\beta(u))\,\delta_{ij} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}^\beta(u), \qquad i,j=1,2,3.$$

Le milieu étant homogène, les coefficients de Lamé (λ, μ) ainsi que la densité ρ sont constants.

0249-6291/87/03040059 $ 2.00

Nous cherchons u solution des équations de l'élastodynamique linéaire, et vérifiant la condition de surface libre sur le bord de Ω:

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{A}(\beta)\,u)_i=-\dfrac{1}{\rho}\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ij}^{\beta}}{\partial x_j}(u)\right)-i\,\beta\sigma_{i3}^{\beta}(u)\right)=\omega^2 u_i, \qquad i=1,2,3 \\ \sigma(u).n=0 \qquad \text{sur } \Gamma=\partial\Omega. \end{array}\right.$$

Nous dirons que u est un mode guidé si u est une solution non nulle de (3), de carré sommable dans Ω. Il s'agit donc d'un problème de valeurs propres pour l'opérateur auto-adjoint positif $\mathrm{A}(\beta)$ qui n'a de solutions que si ω et β vérifient une certaine loi appelée « relation de dispersion ».

Notons que, puisque Ω est un domaine non-borné, l'existence de valeurs propres n'est pas garantie *a priori.*

Nous définissons, en posant $\mathrm{V}=\mathrm{H}^1(\Omega)^3$:

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} (u,v)=\displaystyle\int_{\Omega}\rho\, u\bar{v}\,dx, \qquad (u,v)\in \mathrm{V}^2 \\ a(\beta;u,v)=\displaystyle\sum_{i,j=1}^{3}\int_{\Omega}\varepsilon_{ij}^{\beta}(u)\,\sigma_{ij}^{\beta}(\bar{v})\,dx, \qquad (u,v)\in\mathrm{V}^2. \end{array}\right.$$

La formulation variationnelle de (3) est alors:

$$(5)\qquad \left\{\begin{array}{l} u\in\mathrm{V} \\ a(\beta;u,v)=\omega^2(u,v), \qquad \forall v\in\mathrm{V}. \end{array}\right.$$

LE CAS DU GUIDE CIRCULAIRE. — Dans le cas où la section droite Ω est un cercle, des résultats précis ont été obtenus par Boström et Burden [3]. Ils mettent en évidence l'existence d'une suite dénombrable de modes. Le premier de ceux-ci est double, et se propage pour toute valeur de β. Tous les autres n'existent qu'au-delà d'un seuil de coupure β_m^*.

Les vitesses de phase, ainsi que les seuils, sont caractérisés comme solutions d'une équation transcendante. On peut montrer que les seuils tendent vers l'infini, proportionnellement à m, et que les vitesses de propagation $c_m(\beta)$ tendent lorsque β tend vers l'infini, vers c_{R}, vitesse de l'onde de Rayleigh dans un demi-espace.

Le but de cette Note est la généralisation de ces résultats au cas d'une section droite de forme quelconque. L'outil est l'analyse spectrale des opérateurs auto-adjoints.

ANALYSE SPECTRALE DE $\mathrm{A}(\beta)$. — Nous caractériserons les valeurs propres de $\mathrm{A}(\beta)$ par le principe de Min-Max (Reed-Simon [4]). Nous définissons, pour $v_1,\ldots,v_{n-1}\in\mathrm{V}^{n-1}$.

$$s_m(\beta)=\sup_{v_1,\ldots,v_{n-1}}\ \inf_{v\in]v_1,\ldots,v_{n-1}]^{\perp}}\frac{a(\beta;v,v)}{(v,v)}$$

[L'orthogonalité est définie par rapport au produit scalaire $(.,.)$]. La suite $s_m(\beta)$ est croissante:

$$s_1(\beta)\leqq\ldots\leqq s_m(\beta)\leqq\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathrm{A}(\beta))=\sigma_*.$$

Et, si $s_m(\beta)<\sigma_*$, alors:

$s_m(\beta)$ est la m-ième valeur propre de $A(\beta)$, comptée avec sa multiplicité.

Un point important de l'étude est la détermination du spectre essentiel de $A(\beta)$. Il s'appuie sur une écriture particulière de la forme bilinéaire $a(\beta)$:

LEMME 1. — *On peut écrire, pour* $v\in V$:

$$a(\beta; v, v)=\mu\beta^2|v|^2-2\beta\,\mathrm{Im}\left(\int_\Gamma(\bar{v}_1 n_1+\bar{v}_2 n_2)v_3\,d\gamma\right)+\tilde{a}(\beta, v, v)$$

où $\tilde{a}(\beta)$ *est la forme positive définie par*:

$$\tilde{a}(\beta; v, v)=\lambda\int_\Omega|\operatorname{tr}\varepsilon^\beta(v)|^2\,dx$$
$$+2\mu\int_\Omega\left\{\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+i\frac{\beta}{2}v_3\right|^2+\left|\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+i\frac{\beta}{2}v_3\right|^2\right\}dx$$
$$+\mu\int_\Omega\left|\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right|^2 dx+\mu\int_\Omega|\nabla v_3|^2\,dx.$$

L'intérêt de ce lemme est de faire apparaître $a(\beta)-\mu\beta^2$ comme somme de $\tilde{a}(\beta)$, qui est positive, et d'une perturbation compacte dans $H^1(\Omega)$.

THÉORÈME 1. — (1) *Il existe une constante positive* $\gamma_0\in]0, 1[$ *telle que*:

$$\sigma(A(\beta))\subset\left]\gamma_0\frac{\mu}{\rho}\beta^2; +\infty\right[$$

(2) $$\sigma_{\mathrm{ess}}(A(\beta))=\left[\frac{\mu}{\rho}\beta^2, +\infty\right[\quad\Rightarrow\quad\sigma_*=\frac{\mu}{\rho}\beta^2$$

(3) $A(\beta)$ *n'a pas de valeurs propres plongées dans le spectre essentiel.*

Le théorème 1, joint au principe du Min-Max nous permet d'établir les principaux résultats de cette étude:

THÉORÈME 2. — (1) $\forall\beta\in\mathbb{R}$, $s_1(\beta)=\omega_1^2(\beta)$ *et* $s_2(\beta)=\omega_2^2(\beta)$ *sont valeurs propres de* $A(\beta)$.

(2) *Pour tout* $m>2$, *il existe* β_m^* *(appelé m-ième seuil), tel que*: $\forall\beta>\beta_m^*$, $A(\beta)$ *admet m valeurs propres*

$$s_1(\beta)=\omega_1^2(\beta), s_2(\beta)=\omega_2^2(\beta), \ldots, s_m(\beta)=\omega_m^2(\beta)$$

comptées avec leurs multiplicités.

THÉORÈME 3. — *Pour chaque* β *fixé, l'opérateur* $A(\beta)$ *n'a qu'un nombre fini de valeurs propres. De façon équivalente*:

$$\lim_{m\to\infty}\beta_m^*=+\infty.$$

En ce qui concerne le comportement à haute fréquence des modes guidés, nous avons le résultat suivant:

THÉORÈME 4 :

$$\lim_{\beta\to\infty}\sup c_m(\beta)=\frac{\omega_m(\beta)}{\beta}\leq c_R$$

où c_R *désigne la vitesse de l'onde de Rayleigh dans un demi-espace.*

La démonstration des théorèmes 2 et 4 repose sur le choix de champs tests judicieux. Celle du théorème 3 utilise un résultat de comparaison. Ces démonstrations sont détaillées dans Bamberger, Joly, Kern [2].

Nous essayons actuellement de préciser le comportement asymptotique. Notre conjecture est que, dans le cas d'un ouvert régulier, les vitesses admettent pour limite la vitesse de Rayleigh c_R, alors que dans le cas d'un coin, cette limite est strictement plus petite. Nous nous appuyons pour cela sur des calculs effectués par Wilson [5].

Des prolongements possibles de cette étude consistent à étudier des guides topographiques, utilisés dans la fabrication des lignes à retard. Nous voulons également étudier des phénomènes piezo-électriques, où entre en jeu l'anisotropie du milieu.

Reçue le 8 décembre 1986.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solids*, North Holland, 1975.

[2] A. BAMBERGER, P. JOLY et M. KERN, *Analyse mathématique de la propagation d'ondes guidées par la surface d'une cavité cylindrique de section arbitraire*, Rapport I.N.R.I.A. (à paraître).

[3] A. BOSTRÖM et A. D. BURDEN, Propagation of elastic surface waves along a cylindrical cavity and their excitation by a point source, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 72, 1982, p. 998-1004.

[4] M. REED et B. SIMON, *Methods of Modern Mathematical Physics*, IV, Academic Press, 1978.

[5] L. WILSON et O. MORRISSON, Propagation of elastic surface waves along cylinders of general cross section, *J. Math. Phys.*, 16, n° 9, 1975, p. 1795-1805.

I.N.R.I.A., 78153 *Le Chesnay Cedex.*